9/5/2018

ΟΡΙΣΜΟΣ Δακτύλιος είναι μια τριάδα $(R, +, \cdot)$ ώστε:

i) $(R, +)$ αβελιανή ομάδα

ii) $(R, \cdot)$ προσεταιριστική πράξη

iii) Η σχέση "+" με "·" είναι επιμεριστικότητα.

1) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$, για κάθε $a, b, c \in R$

2) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$, « « «

Συνήθως το "+" το λέμε πρόσθεση στο R
και το "·" << << πολλαπλασιασμό στο R.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ο δακτύλιος των ακεραίων με + γνωστή πρόσθεση. · γνωστός πολλαπλασιασμός.
2) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ δακτ. των ρητών
3) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ << των πραγματικών αριθμών.
4) Έστω $n \geq 1$ και $R = \mathbb{R}^{n \times n}$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$.

Ορίζουμε $+ : R \times R \to R$ "πρόσθεση πινάκων"
$\cdot : R \times R \to R$ "πολλαπλασιασμό πινάκων"

Από Γρ. Άλγεβρα I $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος.
5) Έστω $n \geq 1$ και $\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$ το σύνολο των ακεραίων modulo n.
+ : γνωστή πρόσθεση στο $\mathbb{Z}_n$ (από Θ. Αριθμών)
$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$
· : ο γνωστός πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{Z}_n$, δηλ.
$[a]_n \cdot [b]_n = [a \cdot b]_n$

<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ</u> $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ δακτύλιος

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Έχουμε δει $(\mathbb{Z}_n, +)$ ομάδα. Η πράξη "·" στο $\mathbb{Z}_n$ είναι προσεταιριστική γιατί $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$([a]_n \cdot [b]_n) \cdot [c]_n = [a \cdot b]_n \cdot [c]_n = \underbrace{[(a \cdot b) \cdot c]_n}_{\text{(πολλ. στο } \mathbb{Z})}$$

$$= [a(b \cdot c)]_n = [a]_n \cdot ([b \cdot c]_n) = [a]_n \cdot ([b]_n \cdot [c]_n)$$

Επίσης, "·" επιμερ. στο "+" με παρόμοια απόδειξη.

6) Έστω $R = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}$
(π.χ. $f(x) = |x|$, $f(x) = x^2$ ...)

Ορίζω πράξη $+ : R \times R \to R$ ως εξής

Αν $f, g \in R$, $f+g : R \to R$ είναι η συνάρτηση
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Από Απειρ. Ι f, g συνεχείς $\Rightarrow$ $f+g$ συνεχής άρα
$+$ καλά ορισμένη.
Ορίζω πράξη "$\cdot$" στο R ως εξής. Αν $f, g \in R$
$f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Από Απειρ Ι f, g συνεχείς $\Rightarrow$ $f \cdot g$ συνεχής άρα καλά ορισμένος.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος.

<u>Απόδειξη</u> $+$ προσεταιριστική

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) =$$

$$f(x) + (g(x)+h(x)) = f(x) + ((g+h)(x)) = (f+(g+h))(x)$$

Αφού ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (f+g)+h = f+(g+h)$
άρα $+$ προσετ. στο R.

ΟΥΔΕΤΕΡΟ Η σταθερή συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τιμή 0
ΑΝΤΙΘΕΤΟ: Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ορίζουμε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με
$g(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Φανερά g το
"αντίστροφο" της f ως προς την $+$.

Άρα $(R, +)$ ομάδα

ΠΡΟΣΕΤ. ΠΟΛΛΑΠΛ. Αποδ. όπως προσετ. πρόσθεσης
ΕΠΙΜΕΡ. ΠΟΛΛΑΠΛ. ΠΡΟΣΘ. Παρόμοιο συμπέρασμα
$(R, +, \cdot)$ δακτύλιος.

<u>ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ</u> Αν R δακτύλιος συμβολίζουμε 0_R το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $(R, +)$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος
Ο R λέγεται μεταθετικός δακτύλιος αν η πράξη

"$\cdot$" στο R είναι μεταθετική.

O R λέγεται ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ με μονάδα (ή μοναδιαίος) αν υπάρχει στοιχείο (που συμβολίζεται 1_R) ουδέτερο ως προς το "$\cdot$"

ΠΡΟΣΟΧΗ Σε κάθε δακτύλιο "+" μεταθετικό και έχει ουδέτερο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ μεταθ. δακτύλιος (γιατί $a,b\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow ab=ba$) με μονάδα το 1.

2) Ομοίως $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ μεταθ. δακτύλια με μονάδα.

3) Έστω $n\geq 1$. Τότε ο δακτύλιος των $n\times n$ πινάκων $(\mathbb{R}^{n\times n},+,\cdot)$ έχει ουδέτερο τον μοναδιαίο πίνακα $I_n=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$

Αν $n\geq 2$ από Γρ. Αλγ. ο R δεν είναι μεταθετικός

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για $n=2$

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad\qquad\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ο δακτύλιος $R=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f \text{ συνεχής}\}$ είναι μεταθετικός γιατί $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)=(g\cdot f)(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και μοναδιαίος με μονάδα την σταθερή συνάρτηση με τιμή 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ ΧΩΡΙΣ ΜΟΝΑΔΑ

Έστω $(R,+,\cdot)$ όπου $R=\{a\in\mathbb{Z} : a \text{ άρτιος}\}$ "+", "$\cdot$" οι συνήθεις πράξεις στο $\mathbb{Z}$ περιορισμένες στο R.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1 $(R,+,\cdot)$ Δακτύλιος

ΑΠΟΔ. Εύκολη επαλήθευση.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 2 Ο $(R,+,\cdot)$ ΔΕΝ έχει μονάδα

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $a \in R$ ουδέτερο. Τότε υπάρχει $b \in \mathbb{Z}$ με $a = 2b$. Έχουμε $2 \in R$. Άρα αφού a ουδέτερο $a \cdot 2 = a$. Άρα $(2b) \cdot 2 = 2 \Rightarrow 4b = 2$ αντίφαση, γιατί δεν υπάρχει $b \in \mathbb{Z}$ με $4b = 2$.

ΔΙΟΡΘΩΣΗ

Για να δείξουμε $(R,+,\cdot)$ δακτύλιος πρέπει να δείξουμε ότι $(R,+)$ αβελιανή ομάδα. Άρα πρέπει να δείξουμε εκτός των άλλων και ότι $+$ μεταθετικό.

Στα παραδείγματα.
$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ φανερό
$(\mathbb{Q},+,\cdot)$ «
$(\mathbb{R},+,\cdot)$ «
$(\mathbb{C},+,\cdot)$ «

Στο δακτύλιο (πίνακας) $(\mathbb{R}^{n\times n},+,\cdot)$ φανερά επίσης $+$ μεταθετική. Το ίδιο στο δακτύλιο (Άρτιοι Ακέραιοι, $+,\cdot$). Στο δακτύλιο πρέπει να δείξουμε ότι $f+g=g+f$ το οποίο ισχύει γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (g+f)(x)$

Στοιχειώδεις Ιδιότητες

ΛΗΜΜΑ Έστω $(R,+,\cdot)$ δακτύλιος και O_R το ουδέτερο στοιχείο του $(R,+)$. Τότε για κάθε $a \in R$ έχουμε $a \cdot O_R = O_R \cdot a = O_R$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $O_R + a O_R = a \cdot O_R = a(O_R + O_R) = a \cdot O_R + a \cdot O_R \Rightarrow$

$a \cdot O_R = O_R$ γιατί $(R,+)$ ομάδα $\Rightarrow$ ισχύει ο κανόνας διαγραφής

Παρόμοια $O_R + O_R \cdot a = O_R \cdot a = (O_R + O_R) \cdot a = O_R \cdot a + O_R \cdot a$
$\Rightarrow O_R \cdot a = O_R$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΣΥΜΒΟΛ. Αν $(R,+,\cdot)$ δακτύλιος και $a \in R$ συμβολίζουμε με $-a$ τον "αντίστροφο" του a στην ομάδα $(R,+)$

ΛΗΜΜΑ 2 Έστω $(R,+,\cdot)$ δακτύλιος και $a,b\in R$

Τότε i) $a(-b) = (-a)\cdot b = -(a\cdot b)$
ii) $(-a)\cdot(-b) = ab$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Δείχνουμε πρώτα $a(-b) = -ab$.
Αρκεί αφού $(R,+)$ ΑΒΕΛ. ομάδα να δείξουμε $ab + a(-b) = 0_R$
Έχουμε $ab + a(-b) = a(b+(-b)) = a\cdot 0_R \overset{\text{προηγ. λήμμα}}{=} 0_R$

Δείχνουμε $(-a)\cdot b = -(ab)$
Αρκεί να δείξουμε $ab + (-a)\cdot b = 0_R$
Πράγματι, έχουμε $ab + (-a)\cdot b = (a+(-a))b = 0_R\cdot b \underset{\text{ΠΡΟΗΓ. ΛΗΜΜΑ}}{=} 0_R$

ii) Από το i) $(-a)\cdot(-b) = -((-a)\cdot b) = -(-(ab)) = ab$ γιατί σε κάθε ομάδα G και $a\in G$ ο αντίστροφος του αντιστρόφου του a είναι ο a. (ΑΠΟΔ. $(a^{-1})^{-1} = a^{(-1)(-1)} = a^1 = a$)

ΛΗΜΜΑ 3 Έστω $(R,+,\cdot)$ δακτύλιος ώστε το $(R,\cdot)$ να έχει ουδέτερο στοιχείο. Τότε αυτό είναι μοναδικό.

Απόδειξη Αφού R δακτύλιος η πράξη "$\cdot$" είναι προσεταιριστική $\overset{\text{προσ}}{\Longrightarrow}$ το ουδέτερο στοιχείο της "$\cdot$" μοναδικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $(R = \mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$ και

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a\in\mathbb{R} \right\} \quad \text{Αν } u,v\in S \Rightarrow u+v\in S,\ u\cdot v\in S$$

Εύκολα βλέπουμε ότι τα S με τον περιορισμό των $+$ και $\cdot$ δακτύλιος. Έχει ο S ουδέτερο ως προς τον "$\cdot$";

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Δηλ. ενώ το

ουδέτερο του R δηλ. ο $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

δεν είναι στο S, ο S έχει "δικό" του ουδέτερο το $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Επίσης, όπως είδαμε, ο R δεν είναι μεταθετικός δακτύλιος ενώ προφανώς ο S είναι.

<u>ΕΡΩΤΗΜΑ</u> Πως συγκρίνουμε δύο δακτυλίους

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u> Με την έννοια του ομομορφισμού δακτυλίων.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $(R,+,\cdot)$ και $(R',+',\cdot')$ δύο δακτύλιοι και $\phi: R_1 \to R_2$ μία συνάρτηση. Η ϕ λέγεται ομομορφισμός δακτυλίων αν

i) $\phi(a+b) = \phi(a) +' \phi(b)$, $\forall\, a,b \in R$.

ii) $\phi(a\cdot b) = \phi(a) \cdot' \phi(b)$, $\forall\, a,b \in R$.